

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ДОНЕЦКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ГЛАВЕ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ»

II этап Республиканской студенческой олимпиады по математике

17 марта 2021 года

Задача 1. А ну-ка, докажи

Докажите, что если $1 + x + y = 0$, то $1 + x^3 + y^3 = 3xy$. (3б)

Задача 2. Автоматы и карточки

Имеется два автомата с карточками, на которых написаны числа. Каждый из автоматов принимает карточки и выдаёт взамен новые, числа на которых определяются по закону, которому подчиняется данный автомат.

Пусть первый автомат выдаёт по карточке с числом x карточку с числом $x + 1$, второй автомат по карточке с числом x карточку с числом $\frac{-x}{2}$.

У вас имеется лишь одна карточка с числом 0. Ответьте на следующие вопросы:

1) Как с помощью этих автоматов получить карточку с числом (-11) ? (1б)

2) Как с помощью этих автоматов получить карточку с числом $\frac{33}{16}$? (2б)

3) Возможно ли получить карточку с числом $\frac{1}{3}$? Если возможно, объясните как, а если невозможно, то объясните, почему. (2б)

Задача 3. Покупка конфет

В магазине продаются конфеты трёх видов. Стоимость покупки 0,8 кг первого, 0,2 кг второго и 0,3 кг третьего вида составляет 1000 рублей. Стоимость покупки 0,5 кг первого, 0,3 кг второго и 0,2 кг третьего вида – 800 рублей. Найдите стоимость покупки 1,1 кг первого, 0,1 кг второго и 0,4 кг третьего вида. (3б)

Задача 4. Определитель и квадратное уравнение

Вычислите определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, где α и β – корни квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$. Ответ должен зависеть от p и q . (6б)

Задача 5. Матричное уравнение

Решите матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (6б)

Задача 6. Точка и окружность

Найдите координаты точки на окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, которая наименее удалена от точки $A(6; 2)$, и найдите это наименьшее расстояние. (7б)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ДОНЕЦКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ГЛАВЕ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ»

II этап Республиканской студенческой олимпиады по математике

17 марта 2021 года

Задача 1. А ну-ка, докажи

Докажите, что если $1 + x + y = 0$, то $1 + x^3 + y^3 = 3xy$. (3б)

Задача 2. Автоматы и карточки

Имеется два автомата с карточками, на которых написаны числа. Каждый из автоматов принимает карточки и выдаёт взамен новые, числа на которых определяются по закону, которому подчиняется данный автомат.

Пусть первый автомат выдаёт по карточке с числом x карточку с числом $x + 1$, второй автомат по карточке с числом x карточку с числом $\frac{-x}{2}$.

У вас имеется лишь одна карточка с числом 0. Ответьте на следующие вопросы:

1) Как с помощью этих автоматов получить карточку с числом (-11) ? (1б)

2) Как с помощью этих автоматов получить карточку с числом $\frac{33}{16}$? (2б)

3) Возможно ли получить карточку с числом $\frac{1}{3}$? Если возможно, объясните как, а если невозможно, то объясните, почему. (2б)

Задача 3. Покупка конфет

В магазине продаются конфеты трёх видов. Стоимость покупки 0,8 кг первого, 0,2 кг второго и 0,3 кг третьего вида составляет 1000 рублей. Стоимость покупки 0,5 кг первого, 0,3 кг второго и 0,2 кг третьего вида – 800 рублей. Найдите стоимость покупки 1,1 кг первого, 0,1 кг второго и 0,4 кг третьего вида. (3б)

Задача 4. Определитель и квадратное уравнение

Вычислите определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, где α и β – корни квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$. Ответ должен зависеть от p и q . (6б)

Задача 5. Матричное уравнение

Решите матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. (6б)

Задача 6. Точка и окружность

Найдите координаты точки на окружности $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, которая наименее удалена от точки $A(6; 2)$, и найдите это наименьшее расстояние. (7б)