

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ДОНЕЦКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ГЛАВЕ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ»

II этап Республиканской студенческой олимпиады по математике

20 марта 2019 года

Задача 1. Подтасовка выборов

а) На первом курсе учатся 52 студента, среди которых есть две кандидатуры на должность председателя студенческого совета – Иванов и Петров. Про каждого из 50 студентов известно заранее, за кого он будет голосовать – 30 человек за Иванова и 20 человек за Петрова.

Голосование проходит по следующей схеме: студенты делятся на 5 групп по 10 человек, в каждой группе выбирается кандидат, наиболее популярный среди членов этой группы, и затем из 5 ответов выбирается студент, названный большее число раз. Можно ли разбить студентов на группы так, чтобы в большинстве групп выбрали Петрова, и Петров победил на выборах, несмотря на изначально меньшее число голосующих за него? *(2 балла)*

б) На втором курсе учатся 83 студента, среди которых есть три кандидатуры на должность председателя студенческого совета – Галкин, Чайкин и Чижов. Про каждого из 80 студентов известно заранее, за кого он будет голосовать – 30 человек за Галкина, 30 человек за Чайкина и 20 человек за Чижова. Можно ли разбить студентов на 8 групп по 10 человек так, чтобы большинство групп выбрало Чижова, и он победил на выборах? *(4 балла)*

Задача 2. Игра с камнями

В кучке лежит 20 камней. За один ход из неё можно вынуть 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней. Играют двое, делая по очереди ходы. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Определите, у кого из игроков имеется выигрышная стратегия и опишите эту стратегию. *(6 баллов)*

Задача 3. Лес на плоскости

На координатной плоскости расположен лес, территория которого задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 3x - 4y \geq -12, \\ 9x - 4y \leq 36, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

а) Постройте лес в декартовой системе координат. *(1 балл)*

б) Найдите площадь этого леса. *(2 балла)*

в) В точке с координатами (9; 5) находится путник. Найдите координаты точки леса, расстояние от которой до путника является наименьшим. *(3 балла)*

Задача 4. Наименьшее расстояние между двумя кривыми

Найдите наименьшее расстояние между двумя точками, одна из которых лежит на кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$, а другая – на кривой $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$.
(3 балла)

Задача 5. Матричная кодировка

Агенту посылают секретное слово из четырёх букв латинского алфавита. Каждая буква слова заменяется её порядковым номером в алфавите, затем из соответствующих числа составляют матрицу M размером 2×2 . Например, слово «DEAD» даёт матрицу $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Шифрование состоит в том, что агент получает матрицу MC , где $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Агент получил матрицу $\begin{pmatrix} 51 & -3 \\ 31 & -8 \end{pmatrix}$. Найдите секретное слово.
(4 балла)

Задача 6. Матрицы и числа

Найдите такие числа α и β , что

$$E + \alpha M + \beta M^2 = O,$$

где $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица 2-го порядка, O – нулевая матрица 2-го порядка.
(5 баллов)