

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ДОНЕЦКАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ГЛАВЕ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ»

I этап Республиканской студенческой олимпиады по математике

25 февраля 2020 года

Задача 1. А ну-ка, посчитай. Известно, что для неотрицательных чисел a и b справедливы равенства $(\sqrt{a} + \frac{1}{2})^2 = 1$ и $(\sqrt{b} - \frac{1}{2})^2 = 1$. Найдите значение разности $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. (3 балла)

Задача 2. Неравенство с двумя неизвестными. Найдите все действительные числа x и y такие, что $2x^2 + 4y^2 + 1 \leq 2x(2y + 1)$. (4 балла)

Задача 3. Странное судейство. Итоговый балл в фигурном катании выставляется следующим образом. Бригада судей состоит из десяти человек. Каждый из судей ставит спортсмену свою оценку за выступление – целое число от 1 до 6. После этого из десяти полученных оценок случайным образом выбираются семь. Сумма этих семи оценок и есть итоговый балл. Места между спортсменами распределяются в соответствии с набранным итоговым баллом: чем выше балл, тем лучше результат. В чемпионате участвовало 6 спортсменов. Могло ли оказаться так, что спортсмен, у которого сумма всех 10 оценок максимальна, занял последнее место, а спортсмен, у которого сумма всех 10 оценок минимальна, занял первое место? (7 баллов)

Задача 4. Почти линейная система. Покажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 1 \\ 2x + y^2 - z^3 = -3 \\ 3x - y^2 + z^3 = 3 \end{cases}$$

не имеет действительных решений. (5 баллов)

Задача 5. Утка в пруду. На координатной плоскости расположен пруд, территория которого задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} 5x - 2y \geq 0, \\ x + 2y \leq 12, \\ 3x - y \leq 15, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

а) Постройте пруд в декартовой системе координат. (1 балл)

б) Найдите площадь этого пруда. (2 балла)

в) В пруду в точке с координатами $(4; 3)$ находится утка. Найдите координаты берега пруда, расстояние от которой до утки является наименьшим. (3 балла)